NO: 13-04-16
Date:

Previously on Beligiannis

Έστω $(G_1,\cdot),\dots,(G_n,\cdot)$: ομάδες με ουδέτερα στοιχεία: $e_1,e_2,\dots,e_n$ αντίστοιχα.

Ορίζουμε: $\forall (x_1,\dots,x_n)(y_1,\dots,y_n) \in G_1\times G_2\times\dots\times G_n$

$(x_1,x_2,\dots,x_n)(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1y_1,x_2y_2,\dots,x_ny_n)$

Τότε το ζεύγος $(G_1\times G_2\times\dots\times G_n)$ καλείται ευθύ γινόμενο των $G_1,\dots,G_n$.

- Το ουδέτερο στοιχείο είναι $e=(e_1,e_2,\dots,e_n)$
- Το αντίστροφο στοιχείο είναι $(x_1,x_2,\dots,x_n)^{-1}=(x_1^{-1},x_2^{-1},\dots,x_n^{-1})$
- Πρόταση: Έστω ότι: $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in G_1\times G_2\times\dots\times G_n$. Αν $o(x_i)<\infty$ $1\le i\le n$, τότε: $o(x_1,x_2,\dots,x_n)<\infty$ και

$o(x_1,x_2,\dots,x_n)=[o(x_1),o(x_2),\dots,o(x_n)]$

Απόδειξη: Θέτουμε $o(x_i)=k_i$, $1\le i\le n$. Τότε:

$(x_1,x_2)^{k_1k_2\dots k_n}=(x_1^{k_1k_2\dots k_n},x_2^{k_1k_2\dots k_n},\dots,x_n^{k_1k_2\dots k_n})=$

$=((x_1^{k_1})^{k_2\dots k_n},(x_2^{k_2})^{k_1\dots k_n},\dots,(x_n^{k_n})^{k_1\dots k_{n-1}})=(e_1,e_2,\dots,e_n)=e$

Άρα, $o(x_1,\dots,x_n)<\infty$

NO:
Date:

Έστω $k = o(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Τότε: $(x_1, x_2, \dots, x_n)^k = e = (e_1, e_2, \dots, e_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \Rightarrow x_i^k = e_i, \ 1 \le i \le n$

$\Rightarrow k_i = o(x_i) \mid k, \ 1 \le i \le n \Rightarrow [k_1, k_2, \dots, k_n] \mid k$ (1)

Θα έχουμε: $[k_1, k_2, \dots, k_n] = k_1 a_1 = k_2 a_2 = \dots = k_n a_n$, για κάποιους θετικούς ακεραίους $a_1, \dots, a_n$

Τότε: $(x_1, x_2, \dots, x_n)^{[k_1, k_2, \dots, k_n]} = (x_1^{[k_1, \dots, k_n]}, x_2^{[k_1, \dots, k_n]}, \dots, x_n^{[k_1, \dots, k_n]}) =$

$= (x_1^{k_1 a_1}, x_2^{k_2 a_2}, \dots, x_n^{k_n a_n}) = ((x_1^{k_1})^{a_1}, (x_2^{k_2})^{a_2}, \dots, (x_n^{k_n})^{a_n}) =$

$= (e_1, e_2, \dots, e_n) = e$, $k = o(x_1, x_2, \dots, x_n) \le [k_1, k_2, \dots, k_n]$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε το ζητούμενο.

<u>Άσκηση</u>: Έστω $G_1 = \langle a \rangle$, κυκλική τάξης n
$G_2 = \langle b \rangle$, κυκλική τάξης m

Τότε: η $G_1 \times G_2$ είναι κυκλική τάξης $(n, m) = 1$

NO:
Date:

<u>Λύση:</u> ($\Leftarrow$) Έστω ότι: $(n,m)=1$. Θεωρούμε το στοιχείο $(a,b) \in G_1 \times G_2$. Τότε:

$$o(a,b) = [o(a), o(b)] = [n,m] \overset{(n,m)=1}{=\!=\!=} n \cdot m = |G_1 \times G_2|$$

Τότε: $\langle (a,b) \rangle \leq G_1 \times G_2$ και $|\langle (a,b) \rangle| = o(a,b) = |G_1 \times G_2|$

Προφανώς: $\langle a,b \rangle = G_1 \times G_2 \Rightarrow$ Η $G_1 \times G_2$ είναι κυκλική

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η $G_1 \times G_2$ είναι κυκλική. Άρα υπάρχουν $(x,y) \in G_1 \times G_2$ έτσι ώστε: $G_1 \times G_2 = \langle (x,y) \rangle$

Τότε: $n \cdot m = |G_1 \times G_2| = |\langle (x,y) \rangle| = o(x,y) = [o(x), o(y)] \Rightarrow$

$\Rightarrow [o(x), o(y)] = n \cdot m$ ①

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\, x \in G_1 = \langle a \rangle \Rightarrow o(x) \mid n \\ y \in G_2 = \langle b \rangle \Rightarrow o(y) \mid m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n = o(x) \cdot k \\ m = o(y) \cdot \lambda \end{array}, \quad k, \lambda \geq 1 \quad ②$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Τότε: } n \cdot m = o(x) \cdot o(y) k \lambda \\ \qquad n \cdot m = [o(x), o(y)] \\ (o(x), o(y)) [o(x), o(y)] = o(x) \cdot o(y) \end{array}\right\} \Rightarrow o(x) \cdot o(y) k \lambda = [o(x), o(y)] \Rightarrow$$

$\Rightarrow (o(x), o(y)) [o(x), o(y)] k \lambda = [o(x), o(y)]$

$\Rightarrow (o(x), o(y)) k \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} (o(x), o(y)) = 1 \\ k = \lambda = 1 \end{cases}$

NO:
Date:

Τότε: $\left.\begin{array}{l} o(x)=n \\ o(y)=m \\ (o(x),o(y))=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(n,m)=1}$

• <u>Παράδειγμα</u>: Η ομάδα ευθύ γινόμενο $Z_2 \times Z_3$, η οποία είναι κυκλική, διότι $(2,3)=1$ κι επειδή $|Z_2 \times Z_3| = 6 \Rightarrow Z_2 \times Z_3 \simeq Z_6$

<u>Παρατήρηση</u>: Κυκλικές ομάδες με την ίδια τάξη είναι ισόμορφες

<u>Πόρισμα</u>: Η ομάδα ευθύ γινόμενο $Z_n \times Z_m$ είναι ισόμορφη με την $Z_{n \cdot m} \Leftrightarrow$ η $Z_n \times Z_m$ είναι κυκλική $\Leftrightarrow (n,m)=1$

<u>Άσκηση</u>: Αν $\left.\begin{array}{l} G_1 = \langle a \rangle : \text{κυκλική, άπειρης τάξης} \\ G_2 = \langle b \rangle : \text{—}\,\text{''}\,\text{—} \end{array}\right\}$ τότε

η ομάδα ευθύ γινόμενο $(G_1 \times G_2)$ <u>δεν</u> είναι κυκλική!

<u>Λύση</u>: Υποθέτουμε ότι η ομάδα $G_1 \times G_2$ είναι κυκλική με γεννήτορα το στοιχείο (x,y). $G_1 \times G_2 = \langle (x,y) \rangle$

Τότε: $\left.\begin{array}{l} x \in G_1 = \langle a \rangle \Rightarrow \exists k \in Z : x = a^k \\ y \in G_2 = \langle b \rangle \Rightarrow \exists \lambda \in Z : y = b^\lambda \end{array}\right\}$ ①

NO:
Date:

Τότε: $(a, e_2) \in G_1 \times G_2 = \langle (x,y) \rangle \Rightarrow (a, e_2) = (x,y)^n$ για κάποιο

$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a, e_2) = (x^n, y^n) \Rightarrow \begin{cases} x^n = a \\ y^n = e_2 \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} a^{kn} = a \\ b^{\lambda n} = e_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \cdot n = 0$ (διότι διαφορετικά, $o(b) < \infty$, το οποίο είναι άτοπο)

$\Rightarrow \lambda = 0$ ή $n = 0$

- Όμως, $n \neq 0$, διότι διαφορετικά $a^0 = a \Rightarrow a = e$, το οποίο είναι άτοπο γιατί η τάξη του a είναι <u>άπειρη</u>.

- Άρα, αναγκαστικά $\lambda = 0 \Rightarrow y = e_2$. Οπότε $(x,y) = (a^k, e_2)$

Θα θεωρήσουμε το στοιχείο $(e_1, b) \in G_1 \times G_2 = \langle (x,y) \rangle$
$= \langle (x, e_2) \rangle$

Τότε: $(e_1, b) = (x, e_2)^m = (x^m, e_2) \Rightarrow b = e_2$

<u>Άτοπο</u>, διότι $o(b) = \infty$

<u>Παράδειγμα</u>: Η ομάδα ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ <u>δεν</u> είναι <u>κυκλική</u>!

NO:
Date:

<u>Άσκηση:</u> Αν G_1, G_2 είναι κυκλικές ομάδες, τότε:

Η ομάδα ευθύ γινόμενο $G_1 \times G_2$ είναι κυκλική $\Longleftrightarrow$

i) Αν $|G_1| < \infty$, $|G_2| < \infty$ και $(|G_1|, |G_2|) = 1$

είτε

ii) Αν α) $|G_1| = \infty$ και $|G_2| = \{e_2\}$ $\{G_1 \times G_2 = \langle a, e_2 \rangle, G_1 = \langle a \rangle\}$

β) $|G_1| = \{e_1\}$ κ' $|G_2| = \infty$ $\{G_1 \times G_2 = \langle (e_1, b) \rangle$, όπου $G_2 = \langle b \rangle\}$

• <u>Πρόβλημα:</u> $G_1 \times G_2$: κυκλική $\xrightarrow{?}$ G_i: <u>κυκλική</u> $(i = 1, 2)$

Τότε κάθε υποομάδα της $G_1 \times G_2$ θα είναι <u>κυκλική</u>.

• $G_1 \times \{e_2\} \leq G_1 \times G_2$, θα είναι <u>κυκλική</u>

• $\{e_1\} \times G_2 \leq G_1 \times G_2$ θα είναι <u>κυκλική</u>

Ορίζουμε ~~απεικόνιση~~ απεικόνιση $f: G_1 \to G_1 \times \{e_2\}$, $f(a) = (a, e_2)$

Η f είναι ισομορφισμός ομάδων, διότι: $f(a \cdot b) = (ab, e_2) =$

$= (a, e_2)(b, e_2) = f(a) f(b)$. Επιπλέον, $f(a) = f(b) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (a, e_2) = (b, e_2) \Longrightarrow a = b \Longrightarrow$ <u>f: 1-1 κι επί</u>

Τότε, G: κυκλική με γεννήτορα το γεννήτορα της $G_1 \times \{e_2\}$

Ομοίως $G_2 \simeq \{e_1\} \times G_2$ και η G_2: κυκλική με γεννήτορα το γεννήτορα της $\{e_1\} \times G_2$

NO:
Date:

• Κανονικές Υποομάδες

Έστω G: ομάδα και $H \leq G$

① Πότε για κάθε στοιχείο $x \in G$ ισχύει ότι $xH = Hx$?

② Θεωρούμε το σύνολο πηλίκο $G/R_H \Rightarrow \{xH \subseteq G \mid x \in G\}$

→ Πότε το σύνολο πηλίκο G/R_H είναι ομάδα με φυσικό τρόπο;

{Υπενθύμιση: $\forall x, y \in G: x \sim_H y \Rightarrow x^{-1}y \in H$ }

③ Πότε η σχέση ισοδυναμίας "$\sim_H$" είναι συμβατή με την πράξη • της ομάδας G:

$$\forall x, y, z, w \in G: \left.\begin{array}{l} x \sim_H z \\ y \sim_H w \end{array}\right\} \Rightarrow xy \sim_H zw \ ;$$

! Σχόλιο στο 2 | $\forall\ xH, yH \in G/R_H$: (φυσικός τρόπος πράξης στο σύνολο G/R_H)

! Σχόλιο στο 3 | $\forall\ x, y, z, w \in G : \left\{\begin{array}{l} x \sim_H z \\ y \sim_H w \end{array}\right. \Rightarrow xy \sim_H zw \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall x, y, z, w \in G: \left\{\begin{array}{l} x^{-1}z \in H \\ y^{-1}w \in H \end{array}\right. \Rightarrow (xy)^{-1} z \cdot w \in H \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y, z, w \in G: \left\{\begin{array}{l} z \in xH \\ w \in yH \end{array}\right. \Rightarrow zw \in (xy)H$$

NO:
Date:

$\Leftrightarrow \forall x,y,z,\omega \in G: \begin{cases} xH = zH \\ yH = \omega H \end{cases} \Rightarrow (xy)H = (z\omega)H$

$\Leftrightarrow$ Η πράξη $\cdot : G/R_H \times G/R_H \longrightarrow G/R_H$

$$(xH, yH) \longmapsto (xy)H = xH\,yH$$

είναι καλά ορισμένη.

• Πρόταση: Έστω $H \leq G$ και υποθέτουμε ότι η σχέση ισοδυναμίας "$\sim_H$" είναι συμβατή με την πράξη της ομάδας.

Θέτοντας $G/R_H \overset{op}{=} G/H$, τότε το ζεύγος $(G/H, \cdot)$, όπου:

$\circ : G/H \times G/H \to G/H$

$(xH, yH) \longmapsto xH \cdot yH \overset{op}{=} (xy)H$ είναι ομάδα

Απόδειξη: Επειδή η "$\sim_H$" είναι συμβατή με την πράξη "$\cdot$" της ομάδας, έπεται ότι η πράξη που ορίστηκε παραπάνω είναι καλά ορισμένη.

① $\forall\, xH, yH, zH \in G/H : xH\,(yH\,zH) = xH \cdot (yz)H =$

$= (x(yz))H = ((xy)z)H = (xy)H\,zH = (xH\,yH)\,zH =$

② $\forall\, xH \in G/H : (eH)(xH) = (ex)H = xH = (xe)H =$

$= (xH)(eH) \Rightarrow e_{G/H} = eH = H$

NO:
Date:

$\Rightarrow$ Το $eH = H$ είναι το ουδέτερο στοιχείο για την πράξη που ορίσαμε επί του G/H.

(3) $\forall\ xH \in G/H : (xH)(x^{-1}H) = (x\cdot x^{-1})H = eH = H = (x^{-1}\cdot x)H =$

$= x^{-1}\cdot H \cdot xH \Rightarrow$ Το στοιχείο $x^{-1}H$ είναι το αντίστροφο του xH ως προς την πράξη $\cdot$ επί του G/H.

Άρα, το ζεύγος $(G/H, \cdot)$ αποτελεί ομάδα.

• Έστω $S, T \subseteq G$: ομάδα. Συμβολίζουμε:

$S\cdot T = \left\{ xy \in G \;\middle|\; \begin{matrix} x\in S \\ y \in T \end{matrix} \right\}$ και $S^{-1} = \{ x^{-1} \in G \mid x \in S \}$

Ιδιαίτερα: Αν $S = \{x\}$, τότε $S\cdot T = xT$

Από τώρα και στο εξής: $H \leq G$. Συμβολίζουμε:

$\forall\ x \in G:\quad x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx \in G \mid h \in H\}$

$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \in G \mid h \in H\}$

Αν $S = \{x\}$, τότε: $x^{-1}Hx = S^{-1}HS$

$xHx^{-1} = SHS^{-1}$

NO:
Date:

• <u>Πρόταση</u>: Αν $H \leq G$, τότε $\forall x \in G : x^{-1}Hx \leq G$ και $xHx^{-1} \leq G$

και $|x^{-1}Hx| = |H| = |xHx^{-1}|$

<u>Απόδειξη</u>: • $e \in H \Rightarrow e = x^{-1} \cdot x = x^{-1} \cdot e \cdot x \in x^{-1}Hx \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{e \in x^{-1}Hx}$

• Έστω ότι: $x^{-1}h_1x, x^{-1}h_2x \in x^{-1}Hx$. Τότε: $x^{-1}h_1x \cdot x^{-1}h_2x =$

$= x^{-1}h_1eh_2x = x^{-1}(h_1h_2)x \in x^{-1}Hx$, $h_1h_2 \in H$

• Έστω $x^{-1}hx \in x^{-1}Hx$. Όμως $(x^{-1}hx)^{-1} = x^{-1}h^{-1}(x^{-1})^{-1} =$

$= x^{-1}h^{-1}x \in x^{-1}Hx$, $h^{-1} \in H$

Άρα, $x^{-1}Hx \leq G$

Ορίζουμε απεικόνιση $f : H \to x^{-1}Hx$, $f(h) = x^{-1}hx$

• $f(h_1) = f(h_2) \Rightarrow x^{-1}h_1x = x^{-1}h_2x \Rightarrow h_1x = h_2x \Rightarrow \underline{h_1 = h_2}$

Άρα, η f είναι 1-1

• Η f είναι επί διότι $\forall x^{-1}hx \in x^{-1}Hx : f(h) = x^{-1}hx$

$\Rightarrow$ Η f: 1-1 κι επί $\Rightarrow \boxed{|H| = |x^{-1}Hx|}$

NO:
Date:

Θεώρημα: Για μια υποομάδα $H \leq G$, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες.

① $\forall x \in G, \forall h \in H : x^{-1}hx \in H$

② $\forall x \in G : x^{-1}Hx \subseteq H$

③ $\forall x \in G : x^{-1}Hx = H$

④ $\forall x \in G : xH = Hx$

⑤ Η σχέση ισοδυναμίας "$\sim_H$", την οποία ορίζει η υποομάδα H, να είναι συμβατή με την πράξη "$\cdot$" της ομάδας G.

Απόδειξη: ① ⇒ ② : Προκύπτει άμεσα, διότι $x^{-1}Hx =$
$= \{x^{-1}hx \in G \mid h \in H\}$

② ⇒ ③ : Υποθέτω ότι ισχύει: $\forall x \in G : x^{-1}Hx \subseteq H$. Υποθέτουμε ότι $h \in H$. Θεωρούμε το στοιχείο $xhx^{-1} = (x^{-1})^{-1}hx^{-1} \in y^{-1}Hy \subseteq H$
όπου $\boxed{y = x^{-1}}$

Άρα, $xhx^{-1} \in H \Rightarrow xhx^{-1} = h' \in H$

$h = x^{-1}h'x \in x^{-1}Hx \Rightarrow h \in x^{-1}Hx$

Άρα $H \subseteq x^{-1}Hx$. Οπότε, $x^{-1}Hx = H \;\forall x \in G$

NO:
Date:

③ => ④ : Έστω ότι $\forall x \in G : x^{-1}Hx = H \Rightarrow xx^{-1}Hx = xH \Rightarrow$

$\Rightarrow Hx = xH \ \forall x \in G$

④ => ① : Έστω ότι: $\forall x \in G : xH = Hx \Rightarrow x^{-1}Hx = x^{-1}xH = H$

$\Rightarrow \forall h \in H, \forall x \in G$. Άρα, $x^{-1}hx \in H$

⑤ => ① : Υποθέτουμε ότι η σχέση "$\sim_H$" είναι συμβατή με την πράξη της G

Έστω $x \in G$ και $h \in H$. Τότε: $e \sim_H h$, διότι:

$e^{-1}h = eh = h \in H$

$x \sim_H x$ διότι $x^{-1} \cdot x = e \in H$

Τότε, από την υπόθεση, θα έχουμε: $ex \sim_H hx \Rightarrow$

$\Rightarrow (ex)^{-1} hx \in H \Rightarrow x^{-1}hx \in H$, άρα το ①

① => ⑤ : Υποθέτουμε ότι ισχύει το ① κι έστω:

$xH = zH \Leftrightarrow z \in xH \Rightarrow z = xh_1$, όπου $h_1 \in H$

$yH = wH \Leftrightarrow w \in yH \Rightarrow w = yh_2$, όπου $h_2 \in H$

Τότε: $zw = xh_1 \cdot yh_2$ (Απ' το ④ : $\forall x \in G : xH = Hx$)

$h_1y \in Hy \overset{④}{=} yH \Rightarrow h_1y = yh_3$, για $h_3 \in H$

NO:
Date:

Τότε, $z\omega = xh_1yh_2 = xyh_3h_2 \in (xy)H \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z\omega)H = (xy)H$

Άρα ισχύει το 5

• Ορισμός: Μια υποομάδα $H \leq G$ καλείται κανονική υποομάδα αν-ν ικανοποιείται έστω και μία (κατά συνέπεια όλες) εκ των συνθηκών του θεωρήματος.

Τότε θα γράφουμε: $H \trianglelefteq G$

• $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow \forall x \in G, h \in H: x^{-1}Hx \in H \Longleftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in G: x^{-1}Hx \subseteq H \Leftrightarrow \forall x \in G: x^{-1}Hx = H$

$\Leftrightarrow \forall x \in G: xH = Hx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Η πράξη $xH \cdot yH = (xy)H$ στο G/R_H είναι καλά ορισμένη!